Ορθογώνια πολυώνυμα (Επανάληψη)

$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0 \quad , x_0 = 0 \qquad (E)$

$A_1(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \quad , A_0(x) = \frac{p(p+1)}{1-x^2}$ αναλ. $|x|<1 \, , R=1$

λύσεις: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , |x|<1$

η (E) γίνεται: $(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)c_n x^n = 0$

$\Rightarrow c_2 \cdot 2 \cdot 1 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n c_n (n-1) x^n - \sum_{n=2}$

$(n+2)(n+1)c_{n+2} + (p-n)(p+n+1)c_n = 0 \Longrightarrow c_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+2)(n+1)} c_n \, , n \geq 0$

$(n+2) - n = 2$ άρα παίρνω 2 περιπτώσεις

- $n = 2k \ (k \geq 0)$ έχω: $c_{2(k+1)} = -\frac{(p-2k)(p+2k+1)}{2(k+1)(2k+1)} c_{2k} \quad , k \geq 0$

$\rightarrow k=0: \ c_2 = -\frac{p(p+1)}{2 \cdot 1} c_0$

$\rightarrow k=1: \ c_4 = -\frac{(p-2)(p+3)}{2 \cdot 2 \cdot 3} c_2$

$\vdots$

$\rightarrow k=k-1: \ c_{2k} = -\frac{(p-2k+2)(p+2k-1)}{2 \cdot k(2k-1)} c_{2k-2} \quad , k \geq 1$

Πολλ. κατά μέλη και έχω:

$c_{2k} = (-1)^k \frac{p(p-2)\cdots[p-2(k-1)](p+1)(p+3)\cdots[p+2(k-1)+1]}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)]}$ (αν θέλω πολλ/ζω παρονομαστή και αριθμητή με τους άρτιους που λείπουν από τον παρονομαστή)

$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}x^{2n+1} = (c_0 + c_2x^2 + c_4x^4 + c_6x^6 + \ldots) + (c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + \ldots)$

$= c_0\left(1 + \frac{c_2}{c_0}x^2 + \frac{c_4}{c_0}x^4 + \ldots\right) + c_1\left(x + \frac{c_3}{c_1}x^3 + \ldots\right)$

με $c_0 = 1$ και $c_1 = 0 \rightsquigarrow y_1(x) = 1 + c_2x^2 + x^4x^4 + \ldots$

$c_0 = 0$ και $c_1 = 1 \rightsquigarrow y_2(x) = 1 + c_3x^3 + c_5x^5 + \ldots$

$\Rightarrow \{y_1, y_2\}$ είναι Β.Σ.Λ.

Στην περίπτωση που το $p \in \mathbb{N}$ το γράφουμε ως $m=p$.
$m \in \mathbb{N}$ ~ όταν η μία λύση είναι πολυώνυμο : $P_n(x)$
τότε μπορώ να πάρω πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και όχι μόνο το $(-1,1)$

ΠΧ

όταν $m=0$ τότε $P_0(x)=1$

$$P_1(x)=x$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^2-x)$$
$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

Πρόταση 1 (τύπος Ροντρίγκες)

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m \cdot m}\cdot\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m$$

Πρόταση 2

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx=0 \quad \forall\, n,m\in\mathbb{N}$$

Πρόταση 3

$$\int_{-1}^{1} P_m^2(x)\,dx=\frac{2}{2m+1}$$

Πρόταση 4

$$(m+1)P_{m+1}=(2m+1)xP_m-mP_{m-1}$$

Hermitte

$$y''-2xy'+2py=0 \Rightarrow e^{-x^2}y''-e^{-x^2}2xy'+2pye^{-x^2}=0 \Rightarrow$$
$$[e^{-x^2}y']'+e^{-2x^2}2my=0$$

πολ. : H_m . $(e^{-x^2}H_m')'=-e^{-2x}2mH_m$

Όμοια βγαίνει $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2}H_n(x)H_m(x)\,dx=0$

ΤΕΛΟΣ